

On Diophantine Equation $A^4+B^4+C^4=2*n^2*D^4$

中尾 寿康 Hisayasu Nakao

<khf12033@nifty.com>

楕円曲線の話題のページ <http://www.kaynet.or.jp/~kay/misc/>

- 平方因子を持たない正整数 n に対して、Diophantine Equation

$$A^4+B^4+C^4 = 2*n^2*D^4 \text{ ----- (1)}$$

の整数解 (A,B,C,D) で、 $0<A\leq B\leq C$, $\gcd(A,B,C,D)=1$
となるものを求めたい.

- Noam Elkies[1]よりヒントを得て,平方因子を持たない正整数
 $n\leq 200$ で、これまで整数解が見つかっていなかった

$n=33,41,47,51,59,69,77,83,89,101,119,123,137,141,149,$
 $159,161,173,179,187,197$

について、それぞれ**無数**の整数解を見つけた.

簡単に分かること

- 4乗因子を持たない正整数 k に対して、Diophantine Equation
$$A^4+B^4+C^4 = k \cdot D^4 \quad \text{----- (Eq}_k\text{)}$$
の整数解 (A,B,C,D) で、 $0 < A \leq B \leq C$, $\gcd(A,B,C,D)=1$ となるものを考える.
- $(\text{mod } 5), (\text{mod } 16), (\text{mod } 29)$ で考えることにより、以下が成立する.
- **[定理1]** (Eq_k) が $\gcd(A,B,C,D)=1$ である整数解を持つならば、 $k \equiv 1, 2, 3 \pmod{5}$ かつ $k \equiv 1, 2, 3 \pmod{16}$ かつ $k \not\equiv 0 \pmod{29}$ でなければならない. ($\text{mod } 5$)と($\text{mod } 16$)の制約はTom Womack[4]による.
- **[定理2]** 平方因子を持たない正整数 n に対して、 $(\text{Eq}_{2 \cdot n^2})$ が $\gcd(A,B,C,D)=1$ である整数解を持つならば、 n は2, 5, 29のいずれでも割り切れない[つまり, $\gcd(n, 290)=1$].

小さい整数解

- $n=1,3,7,11,13,17,19,21,23,39,31,37,39,43,53,57,61,67,71,73,79,87,91,93,97,103,107,109,111,113,127,129,131,133,139,143,151,157,163,167,177,181,183,191,193,199$

に対して、 $Eq_{\{2*n^2\}}$ の小さい整数解が判明している.

- 実際に、簡単なプログラムで調べることができる.

例: $(n=11) 19^4+27^4+50^4=242*13^4,$ $358^4+485^4+549^4=242*161^4$

$(n=17) 257^4+336^4+527^4=578*113^4,$ $201^4+521^4+748^4=578*161^4$

$(n=53) 28^4+217^4+453^4=5618*53^4$

$(n=167) 74^4+673^4+787^4=55778*57^4$ $(n=177) 43^4+404^4+827^4=62658*53^4$

Noam Elkiesの方法

- Euler予想の反例[1](1988年)
 $2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4$
- Eq_1 で, $A/D=x+y, B/D=x-y, C/D=t$ とすると, 有理数 u に対して,
$$2*(x^4+6*x^2*y^2+y^4)+t^4=1$$
$$(u^2+2)*y^2=-(3*u^2-8*u+6)*x^2-2*(u^2-2)*x-2*u$$
$$(u^2+2)*t^2=4*(u^2-2)*x^2+8*u*x+(2-u^2)$$
- 各 2 次曲線が有理点を持つ $u=-8/7$ を選択し, 関連する楕円曲線
$$Y^2 = -31790*X^4 + 36941*X^3 - 56158*X^2 + 28849*X + 22030$$

の有理点から (x,y,t) を求め, 最終的に Eq_1 の整数解を得た.

2つの2次曲線の交わりに変換

- (1)の両辺を $C^4 \neq 0$ で割って、 $x=A/C, y=B/C, t=D/C$ とすると、 x, y, t は有理数であり、4次曲面

$$x^4 + y^4 + 1 = 2 \cdot n^2 \cdot t^4 \text{ ----- (2)}$$

の有理点 (x, y, t) を求めれば良い。

- **[定理3]**ある有理数 u に対して、2つの2次式(2次曲線と見なす)

$$\pm(u^2-2) \cdot y^2 = (-u^2+4u-2) \cdot x^2 - 2 \cdot (u^2-2u+2) \cdot x + (-u^2+4u-2) \text{ ----- (3a}\pm\text{)}$$

$$\pm n \cdot (u^2-2) \cdot t^2 = (u^2-2u+2) \cdot x^2 + (-u^2+4u-2) \cdot x + (u^2-2u+2) \text{ ----- (3b}\pm\text{)}$$

を共に満たす有理数 (x, y, t) が存在すれば、 (x, y, t) は(2)を満たす。

(u,x,y,t) のinvolution

- **[定義1]** $(3a_{\pm}), (3b_{\pm})$ の交点 (x,y,t) について、変換 τ, σ を次のinvolution とする (τ, σ により y, t は不変とする).

$$\tau(u) = (u-2)/(u-1), \quad \sigma(u) = 2*(u-1)/(u-2), \quad \tau(x) = \sigma(x) = -x$$

このとき、 $\tau \circ \sigma(u) = 2/u$, $\tau \circ \sigma(x) = x$ となる.

- **[定理4]** 2次曲線 $(3a_+), (3a_-)$ を τ で変換すると、共に不変であり、 $(3b_+), (3b_-)$ を τ で変換すると、それぞれ $(3b_-), (3b_+)$ となる.
- **[定理5]** 2次曲線 $(3a_+), (3a_-)$ を σ で変換すると、それぞれ $(3a_-), (3a_+)$ となり、 $(3b_+), (3b_-)$ を σ で変換すると、共に不変である.
- $u, \tau(u), \sigma(u), \tau \circ \sigma(u)$ から、同じ(2)の有理点が得られるので、 $(3a), (3b_{\pm})$ の組み合わせのみ、考慮すれば十分である.

2次曲線(3a)のnon-singularity

- (3a)の右辺の判別式は、
$$4*(u^2-2*u+2)^2-4*(-u^2+4*u-2)^2 = 4*u*(u-1)*(u-2)$$
なので、以下が成立する.
- **[定理6]** 2次曲線(3a)がsingularであるのは、 $u=0,1,2$ のときに限る.
- **[定理7]** 4次曲線(2)が有理点を持つと仮定する.
2次曲線(3a)がsingularである iff 2次曲線(3c)が有理点 (x,t) を持つ.
$$x^2 + x + 1 = n*t^2 \quad \text{-----}(3c)$$
- $n \leq 200$ (n :square-free, 奇数)の範囲で、(3a)がsingularであるのは、 $n=1,3,7,13,19,21,31,37,39,43,57,61,67,73,79,91,93,(\mathbf{97}),103,109,111,127,129,133,139,151,157,163,181,183,193,199$ のときである. $29|97$ なので、**[定理2]**より $n=\mathbf{97}$ は除外できる.

2 次曲線(3b±)のnon-singularity

- (3b±)の右辺の判別式は、

$$\begin{aligned} & (-u^2+4u-2)^2-4*(u^2-2u+2)^2 = -(u^2+2)*(3u^2-8u+6) \\ & = -(u^2+2)*(3*(u-4/3)^2+2/3) < 0 \end{aligned}$$

なので、以下が成立する.

- **[定理8]** 2 次曲線(3b±)は常にnon-singularである.
- **[定理9]** (3b+),(3b-)はどちらか一方のみ、つまり、
 $u^2>2$ のとき (3b+)のみ, $u^2<2$ のとき (3b-)のみ が成立する.

有理数 u の抽出($n=41$)

- $n=41$ とする. $(3a), (3b_{\pm})$ は共にnon-singularである.
- 2つの2次曲線 $(3a), (3b_{\pm})$ が共に有理点を持つような有理数 u を高さ ≤ 200 の範囲で、抽出する.

$u = -1, 1/5, 1/17, -1/49, 1/53, 3/2, 4/17, -4/45, -4/49, 4/137, 7/9,$
 $8/9, 8/25, -8/45, 8/81, -8/101, 9/4, 10, 11/2, -11/149, 12/109,$

....

$189/128, -196/153, -196/181, 198/89, 198/125, -199/193$

- 144個の u が抽出されるので、これらの u を順に調べる.

2 次曲線(3a)の有理点($n=41, u=198/125$)

- $u=198/125$ とする. (3a),(3b+)より、

$$7954*y^2 = 28546*x^2 + 41908*x + 28546 \text{ ----- (4a)}$$

$$15816529*t^2 = 1016269*x^2 + 1384481*x + 1016269 \text{ ----- (4b+)}$$

- 2次曲線(3a)は有理点 $P(-15559/420776, 775755/420776)$ を持つ.

P を通る傾き k の直線

$$y = k*(x+15559/420776)+775755/420776 \text{ ----- (5)}$$

と曲線(3a)とのもう 1 つの交点 $(x(k), y(k))$ は、以下のようになる.

$$x(k) = (61878143*k^2 + 6170355270*k - 8594866697)/(-1673426152*k^2 + 6005735848) \text{ ----- (6)}$$

$$y(k) = (3085177635*k^2 - 8372793090*k + 11072351115)/(-1673426152*k^2 + 6005735848) \text{ --- (7)}$$

2 次曲線(3b+)の有理点($n=41, u=198/125$)

- (6),(4b+)より、

$$(17251816*(3977*k^2 - 14273)^2*t)^2 = 287644205070868215349*k^4 - 1436879617899897971340*k^3 + 3997420003135110578878*k^2 - 6003499258764516668940*k + 4279348392455021754229 \text{ ----- (8)}$$

- $Y = 17251816*(3977*k^2 - 14273)^2*t \text{ ----- (9)}$
 $X = k \text{ ----- (10)}$

とすると、(8)の左辺は有理数の平方数 Y^2 、右辺は X の4次式(判別式 $\neq 0$)なので、以下のような楕円曲線が得られる.

$$E_{\{41,198/125\}}: Y^2 = 287644205070868215349*X^4 - 1436879617899897971340*X^3 + 3997420003135110578878*X^2 - 6003499258764516668940*X + 4279348392455021754229 \text{ ----- (11)}$$

楕円曲線 $E_{\{41,198/125\}}$ の有理点 ($n=41, u=198/125$)

- MAGMA 4-descent および syzygy map により、楕円曲線 $E_{\{41,198/125\}}$ の有理点 (X, Y) の X 座標 k をいくつか求めると、
以下のようになり、 $\text{rank}(E_{\{41,198/125\}}) > 0$ であることが分かる。

$k = 30407075/26279287, 945967865/1248057599,$
 $1588437129/13721456335, -1219384020107/2053661177915,$
 $7238621986098507/15401438000287805,$
 $2523484525026218281/616919842550050055,$
 $7918680427205562475/1555531906528806611,$
 $206736470097243783595/455301048052810772797,$
....

整数解($n=41, u=198/125$)

- (6),(7),(9),(10)より、これらの k から、有理数 x,y,t を求め、適当な整数を掛けて、 $0 < A \leq B \leq C$ となるように A,B,C を入れ換えると、(1)の整数解が得られる.
- $35401855^4 + 40865628^4 + 53562031^4 = 3362 * 7822733^4$
- $76298339723306940^4 + 144376098024837517^4 + 392097054273222611^4 = 3362 * 51745745604910607^4$
- $22630934278564908444565^4 + 218426009168410193424516^4 + 383430470008039234123883^4 = 3362 * 51630869931062938919159^4$
- ...

整数解($n=41, u=-53/137, -52/73$)

- $n=41, u=-53/137$ のとき、(1)の整数解が得られる.
- $92988^4 + 185585^4 + 200711^4 = 3362 \cdot 30433^4$
- $314623956181553354273249972099755645960593522094013^4 + 33830232913875010523309417936289725557988600411726621^4 + 58958393745878311529280931462685062088878588503601020^4 = 3362 \cdot 7944572692937605931217541696712135904520977308433727^4$
- ...
- $n=41, u=-52/73$ のとき、(1)の整数解が得られる.
- $35401855^4 + 40865628^4 + 53562031^4 = 3362 \cdot 7822733^4$
- $76298339723306940^4 + 144376098024837517^4 + 392097054273222611^4 = 3362 \cdot 51745745604910607^4$
- ...

既知の解から別の解を導出

- ある正整数 n に対して (1)の既知の整数解が存在すれば、(2)を満たす有理点 (x,y,t) および $(3a),(3b\pm)$ を満たす有理数 u を (いくつか)求めることができる.
- $(3a),(3b\pm)$ は共通の有理点 (x,y,t) を持つので、これから導かれる楕円曲線

$$E_{\{n,u\}}: Y^2 = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$$

は自明でない有理点 $P(X,Y)$ を持つ.

- もし P がねじれ点でなければ、 $\text{rank}(E_{\{n,u\}}) > 0$ より、 P の m 倍点から、(1)の別の整数解を求めることができる.

今後の課題

- $n \leq 1000$ の範囲で、(1)が整数解を持つかどうか調べる.
- $k \neq 2 * n^2$ のとき、 (Eq_k) が整数解を持つかどうか調べる.
特に、Tom Womackが整数解を見つけていない

$k=51, (81), 97, 131, 147, 161, 177, 211, 226, 241, 291,$
 $306, 307, 321, 322, 323, 337, 371, 386, 387, 401,$
 $403, 403, 417, 451, 466, 481, 497, 498$ のとき.

- $k=81$ のとき、 (Eq_k) は自明でない整数解を持つ.

Tom Womack[7] $N=1$ の解から導出(3|422481).

$$95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 81 * 140827^4$$

参考文献

- [1]Noam Elkies, "On $A^4+B^4+C^4=D^4$ ", Math Comp. 51(184), 824-835, 1988.
- [2]StarkExchange MATHEMATICS, "Distribution of Primitive Pythagorean Triples (PPT) and of solutions of $A^4+B^4+C^4=D^4$ ", 2016/07/08.
- [3]StarkExchange MATHEMATICS, "More elliptic curves for $x^4+y^4+z^4=1$?", 2017/07/28.
- [4]Tom Womack, "The quartic surfaces $x^4+y^4+z^4=N$ ", 2013/05/17.
- [5]Tom Womack, "elk18.mag", 2013/06/07.
- [6]Tom Womack, "elk18.pts", 2013/06/07.
- [7]Tom Womack, "Integer points on $x^4+y^4+z^4=Nt^4$ ", 2013/06/07.

Appendix: 整数解($n=33$)

- $528988010581^4 + 673826751736^4 + 822834434251^4 = 2178 * 135897934731^4$
- $49844029091^4 + 228952579861^4 + 1483468981664^4 = 2178 * 217182947871^4$
- $32000460716164506351472809244649584^4 + 47670989989820702500353956628214259^4 + 248746349899636462497589048073689931^4 = 2178 * 36426571922982851947285034444085879^4$
- $219507746553061630073271959990039029^4 + 345799864919744525022431412950223784^4 + 383012923799155444962051137895497861^4 = 2178 * 64689472522977490497944967135575859^4$
- ...

Appendix: 整数解($n=41$)

- $92988^4 + 185585^4 + 200711^4 = 3362 * 30433^4$
- $35401855^4 + 40865628^4 + 53562031^4 = 3362 * 7822733^4$
- $76298339723306940^4 + 144376098024837517^4 + 392097054273222611^4 = 3362 * 51745745604910607^4$
- $5441389686377966197^4 + 59528816491569463381^4 + 73706071122362481980^4 = 3362 * 10576637809123172967^4$
- $22630934278564908444565^4 + 218426009168410193424516^4 + 383430470008039234123883^4 = 3362 * 51630869931062938919159^4$
- ...

Appendix: 整数解($n=47$)

- $9051^4 + 142546^4 + 264089^4 = 4418 * 33059^4$
- $24000781^4 + 25966847^4 + 116783982^4 = 4418 * 14339531^4$
- $839990066^4 + 10754417721^4 + 25232397949^4 = 4418 * 3120163151^4$
- $2320229827735239^4 + 5387196649410614^4 + 7263410412294109^4 = 4418 * 953679704196799^4$
- $33272354409^4 + 58269337042^4 + 66621823003^4 = 4418 * 9257840411^4$
- $43103330871658442^4 + 57227097369762201^4 + 73778630076639421^4 = 4418 * 9978790896262367^4$
- ...

Appendix: 整数解($n=51$)

- $129205^4 + 145309^4 + 168674^4 = 5202 \cdot 23303^4$
- $128945^4 + 173302^4 + 268897^4 = 5202 \cdot 33313^4$
- $238031626^4 + 1654352467^4 + 9651492515^4 = 5202 \cdot 1136699363^4$
- $98750347889143^4 + 215709962056415^4 + 331778377250878^4 = 5202 \cdot 40773262891589^4$
- $1917336662159156761^4 + 17974651617345599759^4 + 25232647987275881470^4 = 5202 \cdot 3146304878811925557^4$
- ...

Appendix: 整数解($n=59$)

- $228599^4 + 398665^4 + 545334^4 = 6962 * 63949^4$
- $1650491964322344197661637^4 + 2210459688733716347240518^4 + 2522209689895845066951435^4 = 6962 * 318635150189388184290193^4$
- $93177695405116955725906543306^4 + 120159094306411156271972202859^4 + 137232837767140861187446877355^4 = 6962 * 17402416693032814594130832809^4$
- $2113662790562531464392486935884803042510696481462223^4 + 3665402391908514971432871202880371181419459158306697^4 + 4945738229807822692208097505671537697167655826172110^4 = 6962 * 581998713321257541132885625003178334523728616255497^4$
- ...

Appendix: 整数解($n=69$)

- $2512^4 + 9347^4 + 13145^4 = 9522 * 1409^4$
- $29751025^4 + 48409877^4 + 51287812^4 = 9522 * 6101239^4$
- $27548336363411536^4 + 34270815509506607^4 + 68174472657383795^4 = 9522 * 7052581162829763^4$
- $11823042468517115^4 + 50508246654083497^4 + 70133352524735084^4 = 9522 * 7536625918270763^4$
- $290893744628092216393179621924823895824564957^4 + 301065626397975417636513954737681887112050220^4 + 311049479823858463638836124680364971164268087^4 = 9522 * 40147154594980883866571180445383248201293481^4$
- ...

Appendix: 整数解($n=77$)

- $111417913176^4 + 652385155333^4 + 3074200685543^4 = 11858 \cdot 294747082303^4$
- $989522788949749^4 + 1923889556727881^4 + 2225885962409616^4 = 11858 \cdot 239793073620943^4$
- $1701713511620045181523042141354502976^4 + 2429813624428955092984771383725520743^4 + 2592869368970102591783500612686031981^4 = 11858 \cdot 293873849578109621404244688453108829^4$
- $84311176725896063265078515046409864221399709^4 + 1077645461411499107993340438805609092105996233^4 + 2903716842431288173313339427123879056416285128^4 = 11858 \cdot 279570869292624553125365421372350883158022637^4$

...

Appendix: 整数解($n=89$)

- $1741159879^4 + 278196472772^4 + 415156380825^4 = 15842 * 38743789163^4$
- $126215805930147^4 + 485935830351899^4 + 2973546615480140^4 = 15842 * 265094067731333^4$
- $264969655489272996898855304594180249126633464732806856821540706873750633897448848867267578935283437044^4 + 361682073306942838435651958694629042177131586063663165825648437842499979589004431802393339855767906825^4 + 382994674028578746783341775177187661309563054315698368742944007344090996679206639224538606230584240367^4 = 15842 * 40720638661305420612722155615314259167296330704627036040345118311584880879301979511492594531167168799^4$

• ...

Appendix: 整数解($n=101$)

- $11566524698278008178175494709128636544635230699^4 + 55533467549319684604321403836601861318197410455^4 + 96201694481007146665176733936502346101197249772^4 = 20402 * 8264519317562045735851914877899065409532634189^4$
- $4295871272152466746761976654307690460850681558116960^4 + 5169308675927745227653369081559493536138890498803277^4 + 18709046623091823208347464671193295234961314573378103^4 = 20402 * 1568787235259872750692717840566404947094690664091313^4$
- ...

Appendix: 整数解($n=119$)

- $30287965481668073^4 + 434289126261707635^4 + 996472927107738074^4 = 28322 * 77496631489680909^4$
- $1178108651169045260577235^4 + 1449300748795887082597506^4 + 7193126398093605364125817^4 = 28322 * 554808959893225555073413^4$
- $24258321330732962355999686867846^4 + 27118524650354270173210889778205^4 + 110405582064650932468485560587553^4 = 28322 * 8523272615206458085091781325017^4$
- $179621652851591513607431602636807^4 + 661803692802204416409173195794850^4 + 3816348234118835126195484338646291^4 = 28322 * 294249470881472430760892486290469^4$
- ...

Appendix: 整数解($n=123$)

- $10778^4 + 13981^4 + 20717^4 = 30258 * 1671^4$
- $9742680586^4 + 12683627389^4 + 16880236157^4 = 30258 * 1399528143^4$
- $1769734229756854046587^4 + 3486915123989859025021^4 + 3603245131844079955822^4 = 30258 * 322228288985434432803^4$
- $1039857913303266278554^4 + 4600820832720421233461^4 + 11089025673381008621269^4 = 30258 * 846958331380835688231^4$
- $1605232846552988693663083^4 + 15310099221323106323333974^4 + 26726559230962098999185413^4 = 30258 * 2078920906714410479312607^4$
- ...

Appendix: 整数解($n=137$)

- $28988^4 + 107079^4 + 369559^4 = 37538 * 26597^4$
- $149889^4 + 882044^4 + 1072631^4 = 37538 * 84673^4$
- $41285033^4 + 8319771844^4 + 12991748217^4 = 37538 * 970347493^4$
- $528903084862928115653^4 + 1010317414714122438096^4 + 1266400825285096394317^4 = 37538 * 99587523371200821077^4$
- $1123270679144424415996^4 + 1528445191364715505027^4 + 2799149624896279654029^4 = 37538 * 206638165380989045353^4$
- $28066281938332252682188^4 + 32597622717519441580641^4 + 53527512781059919895257^4 = 37538 * 4035857137120697863367^4$
- ...

Appendix: 整数解($n=141$)

- $72211175^4 + 446853184^4 + 1030134149^4 = 39762 * 73587999^4$
- $82328049398867^4 + 291184239876041^4 + 489955827284800^4 = 39762 * 35738052954763^4$
- $3975344168057762730641673660022153^4 + 6847542807301913144693534544533419^4 + 9894323059504607540624837744117200^4 = 39762 * 741685359160800331690351444620767^4$
- $76216698325480706665870275394710930971323463^4 + 158494710174351223517328161850733983632996549^4 + 237905203227913929848690551246448177376295600^4 = 39762 * 17660816359585032575565829700972865239172143^4$
- ...

Appendix: 整数解($n=149$)

- $636^4+835^4+977^4=44402*77^4$
- $12835^4+66081^4+68332^4=44402*5509^4$
- $71715^4+1450633^4+2637136^4=44402*185697^4$
- $8840735^4+15713293^4+18373504^4=44402*1420989^4$
- $43738985^4+58576676^4+74740597^4=44402*5692923^4$
- $521582748^4+759673885^4+779350391^4=44402*64656449^4$
- $1785158941^4+5869197116^4+6815346585^4=44402*524263337^4$
- $56653458215^4+99705648131^4+185258904468^4=44402*13048130809^4$
- ...

Appendix: 整数解($n=159$)

- $337729^4 + 353654^4 + 622355^4 = 50562 \cdot 43357^4$
- $884233^4 + 3485981^4 + 5140450^4 = 50562 \cdot 359711^4$
- $2385615476550139572205^4 + 3415396128861355429097^4 + 4888027499437979748478^4 = 50562 \cdot 347738676504223369799^4$
- $742883648726397991398166^4 + 2554706198909780236288117^4 + 3888936361307686532836615^4 = 50562 \cdot 270731288091866226576787^4$
- $13234717789541574542377558675^4 + 22807097970157185063684442369^4 + 41979121241903358238053558086^4 = 50562 \cdot 2865031763270811629442013507^4$
- ...

Appendix: 整数解($n=161$)

- $262692^4 + 641495^4 + 842767^4 = 51842 \cdot 60149^4$
- $84031440653299^4 + 124447038425085^4 + 126853114541444^4 = 51842 \cdot 10142715081589^4$
- $331913320561044^4 + 928880285751419^4 + 1311823766263315^4 = 51842 \cdot 92025390542207^4$
- $9019433662370909748^4 + 20557474549673188723^4 + 24891537678758974955^4 = 51842 \cdot 1820237411441634919^4$
- $17653727348589111547927870214379521052274348164^4 + 62644383152379178883632204528590112934485579615^4 + 93890652156849113944474873186907838387919307639^4 = 51842 \cdot 6511705885652024469708520376876117888422865533^4$

• ...

Appendix: 整数解($n=173$)

- $63816^4 + 94031^4 + 110677^4 = 59858 * 7997^4$
- $679791440013^4 + 2128975834321^4 + 3996861353648^4 = 59858 * 260572739551^4$
- $34027731244176857693424923689^4 + 49679350265336908412421547867^4 + 93664253000779810569232111096^4 = 59858 * 6127757850984675358794326967^4$
- $2905988407102387755099198750089142477^4 + 3333579448763531432754324740276781752^4 + 3586561478163250690110642498743867161^4 = 59858 * 278533855217532121314514770260741347^4$
- ...

Appendix: 整数解($n=179$)

- $586876415^4 + 2789777249^4 + 4823616902^4 = 64082 \cdot 311333271^4$
- $204435412070026^4 + 818976253406815^4 + 2621584723264119^4 = 64082 \cdot 165163107938533^4$
- $17537137653148550^4 + 89277051858664349^4 + 296019323791884621^4 = 64082 \cdot 18643692946777843^4$
- $59097058255223912105^4 + 115934795785905848678^4 + 323171332455293862417^4 = 64082 \cdot 20401011204988180909^4$
- $29092425519825072553393^4 + 30531669588515263454575^4 + 44316257411869674667046^4 = 64082 \cdot 3035723354029701765543^4$
- ...

Appendix: 整数解($n=187$)

- $6086^4 + 9507^4 + 10861^4 = 69938 \cdot 761^4$
- $17122^4 + 69383^4 + 120513^4 = 69938 \cdot 7607^4$
- $5923394966698561728962^4 + 15301293989247251073953^4 + 50176446083987978811471^4 = 69938 \cdot 3092269961057201636083^4$
- $5923394966698561728962^4 + 15301293989247251073953^4 + 50176446083987978811471^4 = 69938 \cdot 3092269961057201636083^4$
- $1325365115393947891569013908422151^4 + 12585605149268636076631952580962753^4 + 21134041854104996350824134809098118^4 = 69938 \cdot 1338652538719170937776437333686423^4$
- ...

Appendix: 整数解($n=197$)

- $3023^4 + 87563^4 + 113196^4 = 77618 * 7321^4$
- $50704^4 + 298617^4 + 3012059^4 = 77618 * 180461^4$
- $4860673528^4 + 24006575631^4 + 38338524973^4 = 77618 * 2380651549^4$
- $35154403561^4 + 146558018957^4 + 417622337384^4 = 77618 * 25114981617^4$
- $24829196449573^4 + 1125998409188616^4 + 2120615229563201^4 = 77618 * 129501786045767^4$
- $119522180733957213038997^4 + 182950362081371688453601^4 + 186303932449286322802264^4 = 77618 * 13435407886702380004159^4$

...

Appendix: some n, u with $\text{rank}(E_{\{n,u\}}) > 0$

n	u
1	938/241
3	-504/4817
33	24/53
41	-52/73, 17/81, -56/89, 52/137, 44/169
47	-56/65, 32/85, -77/101, -116/173
51	-33/41, 39/89, -48/101, -73/121, 168/19, 198/137
59	-268/441, 690/53
69	21/25, -28/85, -40/97, 48/113, 5/169, 29/193

n	u
77	28/53, 21/157
83	-8/29, 96/113
89	4/9, -4/9
101	-380/461, 64/585
119	-152/113, 56/157, -133/157
123	32/37, 240/257
137	1/53, 44/61, 21/85, -8/101, -115/157, 56/169, 56/181, -176/185, -187/169
141	-23/29, -60/61, -28/85
149	5/13, 12/13, 21/8, 17/25, -19/85, -56/89, -196/157

n	u
159	4/29, -4/37, 100/113
161	56/61, 77/81, -55/109
171	8/9, -28/85, 84/97, 88/97
179	3/37, 71/34, -140/117, -112/145
187	-4/5, 84/197
197	-20/29, 16/65, -79/85, -44/113, 61/113, -188/137, -172/193

論文(preprint)

論文(査読なし、preprint)

"Constructing Infinite Families of Solutions to $x^4+y^4+z^4=2n^2w^4$ with $z \neq x+y$ via 4-descent on Elliptic Curves"

<https://www.kaynet.or.jp/~kay/misc/paper/math-paper-de.pdf>

... End ...